

## Aula 3 – Representação e propriedades das ondas eletromagnéticas

### Metas da aula

Apresentar as ondas eletromagnéticas planas e derivar algumas de suas propriedades.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar o que é uma onda eletromagnética plana.
- Escrever o campo elétrico associado a uma onda plana monocromática propagando-se ao longo de uma dada direção.
- Calcular o vetor de Poynting associado a uma onda eletromagnética.
- Calcular a pressão de radiação exercida por uma onda eletromagnética sobre uma superfície normal à sua direção de propagação.

### Ondas planas monocromáticas

Na aula anterior, derivamos soluções ondulatórias das Equações de Maxwell na situação particular em que a variação espacial dos campos elétrico e magnético era determinada somente pela variável  $z$ . Nessas condições, você viu que todas as componentes não nulas do campo eletromagnético satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}$$

Todas essas equações são exemplos da equação de onda unidimensional, e suas soluções gerais são da forma  $\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z \pm vt)$  e  $\vec{B}(z, t) = \vec{B}(z \pm vt)$ .

Essas soluções representam ondas eletromagnéticas deslocando-se ao longo do eixo  $z$  com velocidade  $v$ . Você viu também que o valor da fase  $\phi = z \pm vt$  determina completamente o valor dos campos elétrico e magnético em qualquer posição espacial, num dado instante de tempo. Se fixarmos este instante de tempo, digamos  $t = t_0$ , podemos fazer uma “foto” da onda, ou seja, podemos saber os valores assumidos pelos campos elétrico e magnético em todos os pontos do espaço naquele dado instante de tempo. Como seria a “foto”?

Para saber isso, você deve notar que o campo elétrico será o mesmo em todos os pontos do espaço para os quais a fase  $\phi = z \pm vt_0$  assume o *mesmo* valor. A mesma coisa também acontecerá com o campo magnético. À superfície formada por esses pontos, nos quais a fase tem o mesmo valor, dá-se o nome de *frente de onda*. No nosso caso, é muito fácil descobrir quais são essas superfícies. Elas são geradas pelos conjuntos de pontos espaciais para os quais a fase  $\phi = z \pm vt_0$  assume um valor constante. Esses pontos são dados pela expressão  $z = \phi_0 \mp vt_0$ , onde  $\phi_0$  é o valor constante assumido pela fase. Essa expressão nos diz que as frentes de ondas são planos ortogonais ao eixo  $z$ . Na nossa foto, “veríamos”, então, uma infinidade de planos ortogonais ao eixo  $z$ , onde, em cada um deles, os campos elétrico e magnético assumem um valor fixo. Quando o tempo passa, todos esses planos deslocam-se, ao longo do eixo  $z$ , para a direita ou para a esquerda, com velocidade constante  $v$ . Por esse motivo, chamamos ondas eletromagnéticas *planas* aquelas descritas pelo campo elétrico  $\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z \pm vt)$ . Isso significa que as soluções ondulatórias das Equações de Maxwell, obtidas sob as condições especiais discutidas na aula anterior, representam ondas eletromagnéticas planas transversais propagando-se ao longo do eixo  $z$ .

Ao derivarmos tais soluções, supomos que a variação espacial dos campos elétrico e magnético era determinada somente pela variável espacial  $z$ . No entanto, como o espaço é isotrópico e nenhuma direção nele é especial, poderíamos muito bem ter escolhido o eixo  $z$  em qualquer outra direção arbitrária. Podemos concluir, portanto, que, em situações mais gerais, devem existir soluções das Equações de Maxwell representando ondas planas transversais deslocando-se ao longo de uma direção qualquer, representada pelo vetor unitário  $\hat{k}$ . Como deve ser a representação dessas ondas?

Em situações gerais, pode-se mostrar que todas as componentes dos campos elétrico e magnético satisfazem uma equação de onda tridimensional:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} &= 0, \quad i = x, y, z; \\ \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} &= 0, \quad i = x, y, z.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Seja  $f(x, y, z, t)$  qualquer uma das componentes dos campos elétrico ou magnético. Mostremos que qualquer função  $f(x, y, z, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$ , onde  $\hat{k}$  é um vetor unitário e  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ , satisfaz a equação de onda tridimensional:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (3.2)$$

Para isso, basta suirmos o procedimento empregado no exercício 2.3 da aula anterior, onde usamos a equação de onda unidimensional. Seja  $f(x, y, z, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt) = F(\phi)$ , onde  $\phi \equiv \hat{k} \cdot \vec{r} - vt$ . Ao derivarmos a função  $f$  com relação a  $x, y, z$  e  $t$ , podemos aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

onde se subentende que os operadores diferenciais são aplicados à função  $f$ . Não é difícil ver que  $\partial \phi / \partial x = \hat{k}_x$ ,  $\partial \phi / \partial y = \hat{k}_y$ ,  $\partial \phi / \partial z = \hat{k}_z$  e  $\partial \phi / \partial t = -v$ , onde  $\hat{k}_x$ ,  $\hat{k}_y$  e  $\hat{k}_z$  são as componentes cartesianas do vetor unitário  $\hat{k}$ . Logo:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \hat{k}_x \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \hat{k}_y \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \hat{k}_z \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial \phi}; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \hat{k}_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \hat{k}_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \hat{k}_z^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.4)$$

Se usarmos os resultados acima ao substituirmos a função  $f(x, y, z, t)$  na equação de ondas (3.2), obteremos:

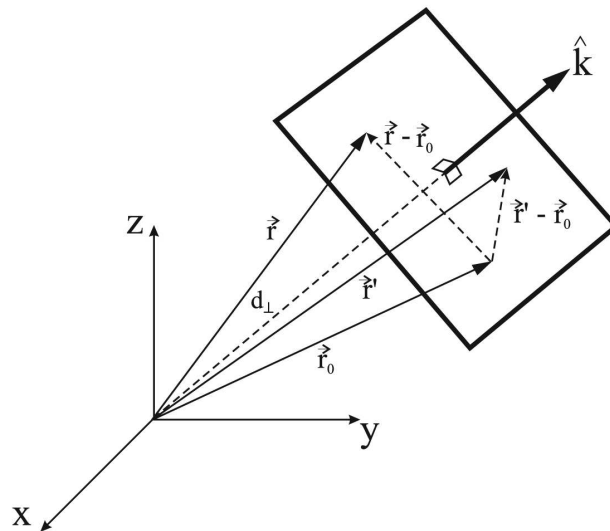
$$\left(\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2\right) \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{1}{v^2} \left(v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}\right) = 0. \quad (3.5)$$

Agora, como  $\hat{k}$  é um vetor unitário,  $\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2 = |\hat{k}|^2 = 1$ , e a equação acima se reduz a:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = 0, \quad (3.6)$$

que é satisfeita por *qualquer* função  $F$  duplamente diferenciável com respeito a  $x, y, z$  e  $t$ . Com isso, demonstramos o que queríamos.

Examinemos agora que superfícies representam as frentes de onda das ondas descritas por  $f(x, y, z, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$ . Para isso, basta fixarmos o instante de tempo, digamos  $t = t_0$ , e descobriremos para quais pontos do espaço, descritos pelo vetor posição  $\vec{r}$ , a fase  $\phi = \hat{k} \cdot \vec{r} - vt_0$  assume um valor constante  $\phi_0$ . Observe que esses pontos satisfazem a equação  $\hat{k} \cdot \vec{r} = \phi_0 + vt_0$ . Essa, no entanto, é a equação de um plano ortogonal ao vetor  $\hat{k}$ , cuja distância  $d_{\perp}$  à origem do sistema de coordenadas, no tempo  $t_0$ , é dada por  $d_{\perp}(t_0) = \phi_0 + vt_0$ . Note que em um instante de tempo posterior,  $t = t_0 + \Delta t$ , a distância desse plano à origem de coordenadas mudará para  $d_{\perp}(t_0 + \Delta t) = \phi_0 + v(t_0 + \Delta t) = d_{\perp}(t_0) + v\Delta t$ . Isso nos mostra que, quando o tempo passa, os planos que representam as frentes de onda deslocam-se ao longo da direção positiva do vetor  $\hat{k}$ , com velocidade constante  $v$ .



**Figura 3.1:** Construção de um plano perpendicular ao vetor  $\hat{k}$  e contendo o ponto representado pelo vetor posição  $\vec{r}_0$ . Os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  representam pontos genéricos do plano.

**Exercício 3.1**

Mostre que os pontos descritos pelo vetor posição  $\vec{r}$  que satisfaz a equação  $\hat{k} \cdot \vec{r} = C$ , onde  $C$  é uma constante e  $\hat{k}$  é um vetor unitário, geram um plano perpendicular ao vetor  $\hat{k}$ , cuja distância à origem é dada por  $C$ .

Solução: seja  $\vec{r}_0$  o vetor posição de um ponto particular de uma superfície  $S$  e seja  $\vec{r}$  o vetor posição de um ponto genérico dessa superfície (veja a **Figura 3.1**). Então, a cada ponto da superfície, podemos associar um vetor  $\vec{r} - \vec{r}_0$ . Se cada um desses vetores satisfizer a equação  $\hat{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ , cada um desses vetores será ortogonal ao vetor  $\hat{k}$ , já que seus produtos internos com o vetor  $\hat{k}$  são todos nulos. Isso significa, no entanto, que todos os vetores  $\vec{r} - \vec{r}_0$  estão em um mesmo plano, que é ortogonal ao vetor  $\hat{k}$ . Olhando para a **Figura 3.1**, é fácil ver que, neste caso, os pontos representados pelo vetor posição  $\vec{r}_0$  e todos os vetores posição  $\vec{r}$  geram um plano perpendicular ao vetor  $\hat{k}$ . Portanto, os pontos representados pelo vetor posição  $\vec{r}$ , que satisfaz a equação  $\hat{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ , que pode ser reescrita como  $\hat{k} \cdot \vec{r} = \hat{k} \cdot \vec{r}_0 = C$ , geram um plano perpendicular ao vetor  $\hat{k}$ . Da **Figura 3.1**, também podemos concluir que  $C = \hat{k} \cdot \vec{r}_0$  é a distância do plano à origem do sistema de coordenadas.

Note que um plano é a superfície formada por todos os pontos, cujos vetores posição têm a mesma projeção ao longo de uma dada direção, e isso é o que nos diz a equação  $\hat{k} \cdot \vec{r} = C$ .

A onda descrita por  $f(x, y, z, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$  é, portanto, uma onda *plana* deslocando-se ao longo da direção representada pelo vetor unitário  $\hat{k}$  com velocidade constante  $v$ . Se escolhermos o vetor  $\hat{k}$  como  $\hat{k} = \hat{z}$ , teremos a situação particular, discutida na aula anterior, de uma onda propagando-se na direção positiva do eixo  $z$ , com velocidade  $v$ , já que  $\hat{z} \cdot \vec{r} = z$ . Se escolhermos  $\hat{k} = -\hat{z}$ , teremos uma onda propagando-se na direção oposta.

Com isso, respondemos à pergunta acerca da representação de uma onda plana propagando-se ao longo de uma direção qualquer e também mostramos que, mesmo em situações mais gerais do que aquelas descritas na aula anterior, existem soluções ondulatórias das Equações de Maxwell que representam ondas eletromagnéticas planas propagando-se ao longo de uma direção arbitrária  $\hat{k}$ . Essas ondas são descritas por campos elétricos da forma:

$$\vec{E}(x, y, z, t) \equiv \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt). \quad (3.7)$$

Note que essas ondas ainda devem ter as mesmas propriedades que as ondas planas deslocando-se ao longo do eixo  $z$ : os campos elétrico e magnético ainda devem ser ortogonais entre si e à direção de propagação da onda. Isso significa que o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e o campo magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  ainda estão relacionados um ao outro pela equação:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (3.8)$$

onde  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ .

É importante salientar que, em contraposição à equação de onda unidimensional, cujas soluções gerais são necessariamente ondas planas, a equação de onda tridimensional admite várias classes de soluções, sendo as soluções de ondas planas apenas uma dessas classes. Como exemplos de outras classes de soluções, podemos citar as ondas esféricas e as ondas cilíndricas.

Você deve estar se perguntando por que estamos dando tanta ênfase às ondas planas. De fato, as ondas eletromagnéticas podem ser muito complicadas em sua distribuição espacial, evolução temporal e propriedades de interação. Atualmente, as técnicas matemáticas do eletromagnetismo clássico (não quântico) são tão poderosas, que é possível descrever, com grande qualidade, fenômenos eletromagnéticos muito complicados, tais como o espalhamento de luz por partículas dielétricas de formato arbitrário e a interação de luz laser com cristais não-lineares.

Para simplificar problemas tão complicados, normalmente decomponemos as ondas eletromagnéticas em somatórios de ondas muito mais simples. Desta forma, podemos analisar o comportamento de cada uma destas ondas mais simples independentemente e, depois, podemos somar novamente estas componentes. Com isso, obtemos o resultado final de um problema complicado como uma soma de soluções de problemas mais simples. Esta é uma estratégia muito utilizada em matemática e física, não apenas no eletromagnetismo. Por exemplo, a luz gerada por um laser pode ser decomposta em ondas planas. Em muitas situações podemos aproximar o feixe de luz laser por uma única onda plana na região do espaço próxima do centro do feixe.

O interessante é que tais ondas simples são, geralmente, tipos especiais de ondas planas, chamadas ondas planas harmônicas ou ondas planas monocromáticas. Daí o nosso interesse pelas ondas planas. Mas o que são ondas planas harmônicas? Note que, até o momento, na expressão da onda plana  $f(\vec{r}, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$ , nós não especificamos a função  $F$ , que pode ser

completamente arbitrária. As ondas planas harmônicas, ou monocromáticas, são aquelas para as quais a função  $F$  mostra uma dependência senoidal com a fase  $\phi = \hat{k} \cdot \vec{r} - vt$ . Em outras palavras, as ondas planas harmônicas são aquelas que podem ser escritas como:

$$f(\vec{r}, t) = A \cos \left[ k \left( \hat{k} \cdot \vec{r} - vt \right) + \phi_0 \right], \quad (3.9)$$

onde a constante  $k$  é chamada de número de onda, e  $A$  e  $\phi_0$  também são constantes. Você já encontrou esse tipo de onda, no caso em que  $\hat{k} = \hat{x}$ , no curso de Física 2B. Mais especificamente, na Aula 2 do Módulo 2 daquele curso. Lá essas ondas foram chamadas *ondas progressivas harmônicas*. Nós sugerimos a você que retorne àquela aula e relembre os conceitos relacionados às ondas harmônicas, como frequência, período temporal, comprimento de onda, número de onda etc.. Frequentemente, as ondas planas harmônicas são escritas de uma forma ligeiramente diferente da expressão acima:

$$f(\vec{r}, t) = A \cos \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0 \right), \quad (3.10)$$

onde  $\vec{k} = k \hat{k}$  é chamado vetor de onda,  $\omega = kv$  é a frequência angular da onda, e  $\phi_0$  é chamado constante de fase. É o fato de essa onda ter uma frequência  $\nu = \omega/2\pi$  bem definida que lhe confere a denominação de monocromática. De fato, nosso sentido da visão associa cores a uma certa faixa de frequências das ondas eletromagnéticas que atingem nossos olhos. Por exemplo, associamos a cor azul a ondas eletromagnéticas de frequência em torno de  $\nu = 6,7 \times 10^{14} Hz$ , que corresponde a um comprimento de onda  $\lambda = 450 nm$  (veja a **Figura 2.1** da aula anterior). Lembre que  $A$  representa a amplitude da onda e  $\lambda = 2\pi/k$  seu comprimento de onda. As ondas eletromagnéticas elementares que discutiremos neste curso serão ondas eletromagnéticas planas monocromáticas. Os campos elétricos e magnéticos associados a uma classe importante dessas ondas serão, por exemplo, descritos por:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \cos \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0 \right), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \cos \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0 \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  são vetores constantes e relacionados entre si através da expressão  $\vec{B}_0 = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}_0$ . Veremos, na próxima aula, que os campos acima descrevem uma onda eletromagnética plana, monocromática e linearmente polarizada.

## Vetor de Poynting

Quando uma onda eletromagnética se propaga, transporta energia e pode transferir esta energia para os corpos com os quais eventualmente interaja. Em nossa vida diária, temos várias experiências que comprovam esta afirmação. Um exemplo é a radiação que vem do sol. Quando as ondas eletromagnéticas que vêm do sol interagem com o corpo humano, sentimos imediatamente o calor provocado principalmente pela parcela de infravermelho e de microondas presentes na radiação solar. Além disto, a exposição ao sol provoca o bronzeamento, principalmente devido ao ultravioleta. Todos estes efeitos envolvem transferência de energia da onda eletromagnética para o corpo humano. A transferência da energia da onda para um objeto depende muito das propriedades do material de que o objeto é constituído. Nesta seção, estudaremos a relação entre a energia transportada por uma onda e seus campos elétrico e magnético associados.

Uma onda eletromagnética existe dentro de alguma região do espaço. Como sabemos que os campos elétrico e magnético podem armazenar energia, podemos nos perguntar qual é a densidade de energia eletromagnética (energia por unidade de volume) na região ocupada pela onda. Pode-se mostrar que a densidade de energia  $u_E$  associada ao campo elétrico  $\vec{E}$  e a densidade de energia  $u_B$  associada ao campo magnético  $\vec{B}$ , em um determinado ponto do espaço, são dadas por:

$$u_E = \frac{\epsilon}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon}{2} E^2 \quad ; \quad u_B = \frac{1}{2\mu} \vec{B} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2\mu} B^2. \quad (3.12)$$

Logo, a densidade de energia total  $u$  armazenada na região ocupada pela onda eletromagnética é  $u = u_E + u_B$ . Agora, numa onda eletromagnética, sabemos que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  estão intimamente relacionados. Em particular, para uma onda plana, sabemos que essa relação é dada por:

$$\vec{B} = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{k} \times \vec{E}. \quad (3.13)$$

Dado que  $\hat{k}$  é um vetor de módulo unitário, a relação acima nos diz que  $B = E/v = \sqrt{\mu\epsilon}E$ . Se substituirmos essa expressão na equação (3.12) para a densidade de energia  $u_B$ , teremos:

$$u_B = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{\mu\epsilon}{2\mu} E^2 = \frac{\epsilon}{2} E^2 = u_E. \quad (3.14)$$

Veja que interessante! Em uma onda eletromagnética plana, a cada instante, metade da energia está armazenada na forma de energia elétrica e metade na forma de energia magnética!

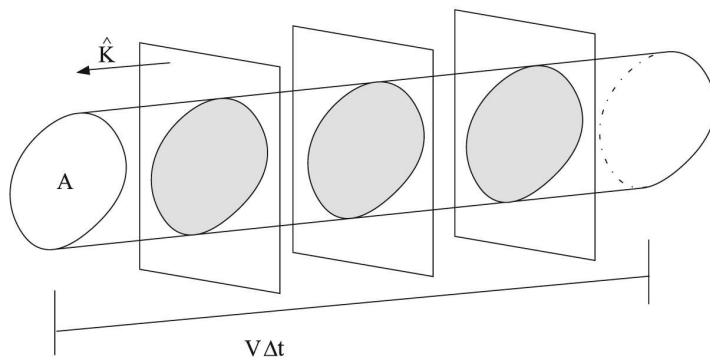
Agora, que sabemos qual é a densidade de energia armazenada em qualquer ponto dentro de uma região ocupada por uma onda eletromagnética, podemos nos perguntar como ocorre o transporte dessa energia de um lugar para outro, quando a onda eletromagnética se propaga. Chamemos  $S$  o fluxo de energia por unidade de tempo, através de uma área unitária que está sendo atravessada por uma onda eletromagnética. Como podemos calcular o valor de  $S$ ? A **Figura 3.2** mostra uma representação esquemática de uma onda eletromagnética viajando com velocidade  $v$  e atravessando uma certa área  $A$ . Durante um intervalo de tempo muito curto  $\Delta t$ , apenas a energia contida no volume  $v \Delta t A$  atravessará a área  $A$ . Essa energia será dada por  $\Delta U = u (v \Delta t A)$ . Assim, o valor de  $S$  será:

$$S = \frac{\Delta U}{\Delta t A} = \frac{u v \Delta t A}{\Delta t A} = u v. \quad (3.15)$$

Podemos modificar a forma da expressão anterior se lembrarmos que  $u = u_E + u_B = 2u_B$ , dado que  $u_E = u_B$ . Lembrando ainda que  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , podemos escrever:

$$S = 2u_B v = 2 \times \frac{1}{2\mu} B^2 \times \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\mu\sqrt{\mu\epsilon}} B B = \frac{1}{\mu} E B, \quad (3.16)$$

onde usamos o fato de que  $B = \sqrt{\mu\epsilon} E$ .



**Figura 3.2:** Representação esquemática do fluxo de energia eletromagnética através de uma área  $A$ .

Agora, nós vamos supor que a energia eletromagnética flua ao longo da direção de propagação da onda e introduzir um vetor associado a esse fluxo, pela equação:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (3.17)$$

O vetor  $\vec{S}$  é chamado vetor de **Poynting**, e seu módulo é igual à grandeza  $S$ , definida na equação (3.15). Além disso, a direção de  $\vec{S}$  define a direção



**John Henry Poynting** nasceu em Manchester, Inglaterra, em 1852. Em 1884, publicou o trabalho sobre o transporte de energia eletromagnética, definindo o que hoje é conhecido como vetor de Poynting. Também é conhecido por ter medido a constante da gravitação universal em 1891, e por ter previsto o efeito de arraste de partículas de poeira no Sistema Solar em direção ao Sol (efeito Poynting-Robertson).

do fluxo de energia eletromagnética, já que a direção desse vetor coincide com a direção  $\hat{k}$  de propagação da onda eletromagnética. De fato, usando a relação  $\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{k} \times \vec{E}$ , podemos escrever:

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} \times (\hat{k} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\vec{E} \cdot \vec{E}) \hat{k} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\vec{E} \cdot \hat{k}) \vec{E}, \quad (3.18)$$

onde usamos a identidade vetorial  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ . Como nas situações tratadas neste curso, as ondas eletromagnéticas são transversais, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são ortogonais à direção de propagação das ondas. Assim,  $\vec{E} \cdot \hat{k} = 0$ , e o último termo da equação (3.18) se anula, fornecendo:

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \hat{k} = \frac{1}{\mu v} E^2 \hat{k} = u v \hat{k}, \quad (3.19)$$

o que mostra que  $\vec{S}$  é paralelo à direção de propagação da onda. Note que o vetor de Poynting  $\vec{S}$  tem o mesmo papel com relação à energia eletromagnética que o vetor densidade de corrente  $\vec{J}$  tem em relação à corrente elétrica. Ele representa a densidade de corrente de energia eletromagnética.

### Intensidade de uma onda eletromagnética

No caso particular de uma onda plana monocromática para a qual  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$ , o vetor de Poynting será dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu v} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0) \hat{k} = \frac{1}{2\mu v} E_0^2 \left(1 + \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\omega t + 2\phi_0)\right) \hat{k},$$

de modo que o fluxo instantâneo de energia por unidade de tempo por unidade de área oscila com o dobro da frequência da onda. A luz visível tem frequência de oscilação da ordem de  $10^{15}$  Hz. Para ondas eletromagnéticas com essas frequências, o fluxo instantâneo de energia oscila muito rapidamente, tornando impraticável uma medida direta de seu valor. Os instrumentos rotineiros em laboratórios costumam apenas medir o valor médio  $\langle \vec{S} \rangle$  dessa grandeza, onde a média temporal é tomada sobre vários períodos de sua oscilação. Por esse motivo, é vantajoso introduzir o conceito de intensidade  $I$  de uma onda eletromagnética, que é dada pelo valor médio do vetor de Poynting ao longo da direção de propagação da onda:

$$I = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{k}. \quad (3.20)$$

A intensidade é uma quantidade escalar. Assim como o módulo do vetor de Poynting representa o fluxo de energia por unidade de tempo e de

área, a intensidade representa o *fluxo médio* de energia por unidade de tempo e de área, considerando vários períodos de oscilação da onda.

Para uma onda plana monocromática, a intensidade será dada por:

$$I = \frac{1}{2\mu v} E_0^2 \left( 1 + \left\langle \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\omega t + 2\phi_0) \right\rangle \right). \quad (3.21)$$

Os símbolos  $\langle \rangle$  indicam que o valor médio da grandeza deve ser calculado. O valor médio do cosseno, durante um ciclo completo, é nulo, pois essa função assume valores positivos e negativos que se cancelam mutuamente ao final de um ciclo. Assim, ficamos com:

$$I = \frac{1}{\mu v} \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2. \quad (3.22)$$

Noutras palavras, a intensidade é proporcional ao quadrado do módulo da amplitude do campo elétrico.

### Exercício 3.2

Escreva a intensidade da onda eletromagnética como uma função da densidade de energia  $u_E$  armazenada no campo elétrico e também como uma função da densidade de energia  $u_B$  armazenada no campo magnético.

## Exercício 3.3

O feixe de luz produzido por um laser tem uma potência de  $P = 1\text{mW}$  e se propaga no espaço vazio. A intensidade  $I$  do feixe é aproximadamente uniforme na seção reta circular (perpendicular à direção de propagação) de raio  $R = 1\text{mm}$ , como mostra a **Figura 3.3**. Na região do espaço ocupada pelo feixe, aproxime-o por uma onda plana para poder utilizar os resultados obtidos nesta aula. Pode-se mostrar que essa abordagem é válida quando o raio  $R$  é muito maior que o comprimento de onda do feixe.

- Determine o valor da intensidade  $I$  do feixe.
- Determine a densidade de energia eletromagnética (soma das parcelas elétrica e magnética) num ponto no interior da seção reta do feixe.
- Determine o módulo do vetor campo elétrico  $|\vec{E}|$  em  $\text{Vs/m}$  num ponto no interior da seção reta do feixe. Use o valor

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{m J})$$

para a permissividade elétrica do vácuo (lembre que  $1\text{V} = 1\text{J/C}$ ).

Solução:

- A área da seção reta do feixe vale

$$A = \pi R^2 = 3,14 \times 10^{-6} \text{m}^2. \quad (3.23)$$

A intensidade representa a potência por unidade de área:  $I = P/A$ . Usando o resultado da Equação (3.23)

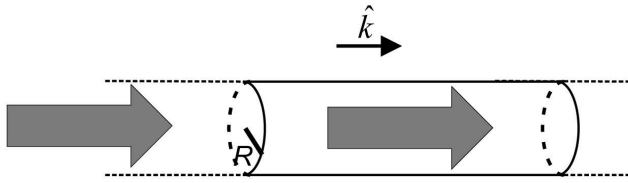
$$I = \frac{10^{-3} \text{W}}{3,14 \times 10^{-6} \text{m}^2} = 318 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (3.24)$$

- A densidade de energia eletromagnética vale (note que  $1\text{W} = 1\text{J/s}$ )

$$u = \frac{I}{c} = \frac{318 \text{W/m}^2}{3,0 \times 10^8 \text{m/s}} = 1,1 \times 10^{-6} \text{J/m}^3. \quad (3.25)$$

- A intensidade está relacionada ao módulo do campo elétrico pela equação  $I = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2$ . Temos então:

$$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{I}{\epsilon_0 c}} = 346 \frac{\text{J}}{\text{C m}} = 346 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (3.26)$$



**Figura 3.3:** Feixe de luz laser de raio  $R$ .

## Pressão de Radiação

Como você viu, uma onda eletromagnética carrega energia. Na nossa experiência diária, percebemos vários efeitos dos diferentes tipos de radiação sobre os objetos. Uma pergunta interessante seria se a luz é capaz de exercer uma força sobre os objetos. A resposta é afirmativa, porque as ondas eletromagnéticas também transportam *momento linear*, além de energia. O momento linear transportado por uma onda eletromagnética plana, através de uma área  $A$ , normal à sua direção de propagação, é dado por:

$$\vec{\Delta p} = \frac{\Delta U}{c} \hat{k}, \quad (3.27)$$

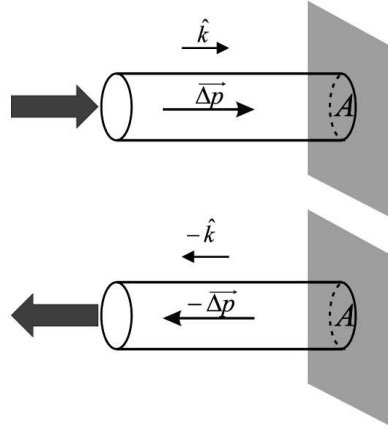
onde  $\Delta U$  é a quantidade de energia transportada pela onda, que atravessa a área  $A$ . Note que o momento linear, que é uma grandeza vetorial, tem a direção e o sentido da propagação da onda. Uma forma de visualizar o transporte de momento linear seria imaginar que a luz é feita de minúsculas bolinhas e que cada bolinha, ao colidir com um certo corpo, transferiria momento linear para ele, empurrando-o no sentido da propagação do feixe de luz. Obviamente, a teoria eletromagnética não prevê que a luz seja composta por bolinhas, mas sim uma onda contínua. Mesmo assim, pode-se mostrar que um feixe de luz transfere, sim, momento linear para um corpo, exercendo pressão sobre ele como se fosse, por exemplo, um jato de água.

Vamos, inicialmente, calcular o momento linear transferido por uma onda eletromagnética, no caso em que toda a fração de energia da onda que incide sobre o corpo é absorvida por ele. Aqui faremos um tratamento unidimensional, ou seja, vamos supor que todas as grandezas que são vetoriais sejam paralelas a uma mesma direção. Nesse caso, como toda a energia eletromagnética que incide sobre o corpo é absorvida por ele, a mesma coisa acontecerá com o momento linear associado a essa energia.

Pela equação (3.27), o momento linear transferido ao corpo será:

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c}, \quad (3.28)$$

onde  $\Delta U$  é a quantidade de energia absorvida pelo corpo. Note que o momento transferido ao corpo aponta no sentido de propagação da onda.



**Figura 3.4:** Representação esquemática da incidência, suida pela reflexão total, de um feixe de luz laser sobre a face plana de um corpo.

Qual seria o momento transferido se o corpo, em vez de absorver toda a energia da onda que incide sobre ele, a refletisse completamente? Este seria, por exemplo, o caso se o corpo sobre o qual a onda incide, fosse perfeitamente espelhado. Examinemos a situação mais simples, em que a onda incide sobre a face plana de um corpo, estando essa face orientada ao longo da direção normal à direção de propagação da onda (veja a **Figura 3.4**). Como a onda é completamente refletida, ou seja, nenhuma fração da energia incidente sobre o corpo é absorvida, ela retornará, propagando-se no sentido inverso, transportando o mesmo momento linear que transportava antes. O vetor momento linear, no entanto, aponta no sentido oposto ao sentido anterior. A variação do momento linear transportado pela onda antes e depois da reflexão será, portanto,  $\Delta p = -2\Delta U/c$ , onde  $\Delta U/c$  é o momento transportado pela onda até o corpo. Como o momento linear total do sistema formado pelo corpo e pela onda deve ser conservado, a variação, no momento linear do corpo, deve corresponder, exatamente, ao oposto da variação do momento da onda. O momento linear transferido ao corpo será, portanto:

$$\Delta p = 2\frac{\Delta U}{c}. \quad (3.29)$$

Observe que, neste caso, o momento linear transferido da onda para o corpo é o dobro do momento transferido no caso de absorção total da onda pelo corpo.

Se, ao incidir sobre um corpo, a onda causa uma mudança no momento linear do corpo, a onda exerce uma força sobre o corpo. Podemos determinar o valor médio dessa força calculando a quantidade de momento linear  $\overline{\Delta p}$  transferido da onda ao corpo durante um intervalo de tempo muito curto  $\Delta t$ :

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t}. \quad (3.30)$$

Essa força, naturalmente, dependerá da área do corpo, sobre a qual a onda incide, pois, quanto maior essa área, maior a quantidade de energia que incide sobre o corpo. Existe uma grandeza intimamente ligada a essa força, mas que apresenta a vantagem de ser independente da área do corpo. Essa grandeza se chama *pressão de radiação* e é igual à força média exercida pela onda por unidade de área normal à direção de propagação da onda:

$$p_r = \frac{F}{A}, \quad (3.31)$$

onde  $A$  é a área do corpo, normal à direção de propagação da onda. Note que estamos usando o símbolo  $p_r$  para pressão de radiação e  $p$  para o momento. Calculemos, agora, a pressão de radiação sobre o corpo, nos casos discutidos há pouco, em que a onda é completamente absorvida ou completamente refletida pelo corpo. No primeiro caso, teremos:

$$p_r = \frac{\bar{F}}{A} = \frac{\Delta p}{A\Delta t} = \frac{\Delta U}{cA\Delta t}, \quad (3.32)$$

onde usamos as equações (3.30) e (3.28). Podemos relacionar a energia  $\Delta U$  transportada através de uma área  $A$ , durante um certo intervalo de tempo  $\Delta t$ , com a intensidade  $I$  da onda:

$$\Delta U = IA\Delta t. \quad (3.33)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (3.32), obtemos, para o caso de absorção total:

$$p_r = \frac{I}{c}. \quad (3.34)$$

Como o momento linear transferido ao corpo pela onda, no caso de reflexão total da onda, corresponde ao dobro do momento transferido na

absorção total, é fácil ver que, nesse caso, a pressão de radiação será dada por:

$$p_r = 2\frac{I}{c}. \quad (3.35)$$

#### Exercício 3.4

Suponha que o feixe de luz laser considerado no exercício 3.3 incida sobre um espelho plano, de área muito maior que a área da seção reta do feixe, ao longo da direção normal ao espelho. Toda a potência incidente é refletida pelo espelho. Calcule a pressão de radiação e a força exercidas pelo feixe de luz.

Solução:

A pressão de radiação é dada por

$$p_r = \frac{I}{c} = 1.1 \times 10^{-6} \text{N/m}^2. \quad (3.36)$$

Esta pressão atua sobre a área iluminada pelo feixe, que é igual à área  $A$  da sua seção reta. Então, o módulo da força vale (lembre que  $1\text{pN} = 10^{-12}\text{N}$ ):

$$|\vec{F}| = p_r \times A = 3.33\text{pN}, \quad (3.37)$$

e a sua direção e sentido coincidem com a direção e sentido de propagação do feixe.

Desta forma, podemos ver que um feixe de luz, ou uma onda eletromagnética qualquer, exerce uma pressão sobre o corpo, no qual ela incide. Esta pressão é proporcional à intensidade da onda, como já poderíamos intuir. Experimentos foram feitos demonstrando a pressão de radiação, e hoje em dia esta idéia é tão bem aceita, que existem até projetos de naves espaciais que utilizam as chamadas *velas solares*. São naves equipadas com enormes superfícies refletoras. Ao incidir sobre estas superfícies, a luz do sol exerceria pressão de radiação sobre as superfícies, impulsionando a nave no sentido de propagação da luz solar. Esta força seria pequena se comparada com os poderosos propulsores a combustão. Entretanto, como no espaço não há atrito e como a força atua o tempo todo, o efeito acumulado deste tipo de propulsão poderia levar uma nave a velocidades altíssimas após algum tempo.

**Exercício 3.5**

Um veleiro solar possui um espelho plano de área  $A = 400\text{m}^2$ . A intensidade da radiação solar no topo da atmosfera terrestre vale  $I = 1.4\text{kW/m}^2$ . Calcule a força exercida pela radiação sobre o veleiro, quando o seu espelho é perpendicular à direção de propagação da radiação.

Solução:

O módulo da força é o produto da pressão de radiação pela área do veleiro:

$$|\vec{F}| = \frac{I}{c} A = 1.9 \times 10^{-3}\text{N}. \quad (3.38)$$

A direção e o sentido de  $\vec{F}$  coincidem com a direção e o sentido da propagação da radiação.

## Conclusão

Nesta aula, obtivemos soluções ondulatórias das Equações de Maxwell mais gerais que as soluções obtidas na aula anterior. Essas soluções são chamadas ondas planas. Além disso, você viu que existe uma classe de ondas planas muito importante, chamadas de ondas planas monocromáticas. Também vimos que as ondas eletromagnéticas transportam energia e momento linear. A cada instante, a energia transportada por uma onda plana está igualmente dividida em energia elétrica e energia magnética. Introduzimos o vetor de Poynting  $\vec{S}$ , que tem o mesmo papel com relação à energia eletromagnética que o vetor densidade de corrente  $\vec{J}$  tem em relação à corrente elétrica. Também introduzimos o conceito de intensidade de uma onda eletromagnética. Além disso, você observou que uma onda, ao incidir sobre um corpo, exerce uma pressão sobre ele, chamada pressão de radiação, e aprendeu a calcular essa pressão em algumas situações simples.

## Atividades Finais

1. Faça a experiência de explicar a um(a) colega o que é uma onda plana monocromática. Deixe claro qual propriedade da onda está relacionada ao caráter de onda plana e qual propriedade está relacionada ao caráter de onda monocromática.

2. Defina o vetor de Poynting associado a uma onda eletromagnética e descreva qual a relação desse vetor com o transporte de energia eletromagnética pela onda.
3. Qual é a relação entre o vetor de Poynting e a densidade de energia dos campos elétrico e magnético?
4. O que é a intensidade de uma onda eletromagnética?
5. Qual a relação entre a intensidade de um feixe de luz e a pressão exercida por ele sobre um corpo absorvedor e sobre um corpo refletor.

### Resumo

Uma onda plana é uma onda, cujas frentes de onda são planos ortogonais à direção de propagação da onda. Existem classes de soluções das Equações de Maxwell que podem ser representadas por ondas planas propagando-se ao longo de uma direção qualquer do espaço. Uma onda eletromagnética, ao propagar-se, transporta energia e momento linear. O transporte de momento linear pela onda dá origem à pressão de radiação, que é proporcional à intensidade da onda.

### E ao longo da próxima aula...

...você aprenderá o que é a polarização de uma onda e verá que existem vários tipos de polarização possíveis. Além disso, você irá analisar a interação da luz com vários instrumentos sensíveis à polarização.